

## Römer et la vitesse de la lumière

**Énoncé :** En 1671, l'astronome danois Olaus Christensen Römer étudie les satellites de Jupiter (découvert par Galilée en 1609) à l'Observatoire de Paris. Plus précisément, il étudie les éclipses de ces satellites (et en particulier des séries d'éclipses du satellite Io), dont on pensait à l'époque qu'elles pourraient constituer un moyen de détermination des longitudes en mer.

Römer se rend alors compte que ces éclipses se produisent souvent en avance (ou en retard) de plusieurs minutes par rapport aux éphémérides (c'est-à-dire aux précisions théoriques) calculées par Jean-Dominique Cassini (une révolution approximativement toutes les 42,5 heures pour le satellite Io). Plus précisément, les « sorties d'éclipses » observées (c'est-à-dire le moment où le satellite sort de l'ombre de Jupiter) sont *en retard* par rapport aux éphémérides quand la Terre *s'éloigne* de Jupiter, et les entrées d'éclipses sont en avance quand la Terre *s'en rapproche*.

(a) Comment Römer interprète-t-il cela ? Faites un dessin (sur lequel figure la Terre, le Soleil, Jupiter et le satellite Io) pour appuyer votre réponse.

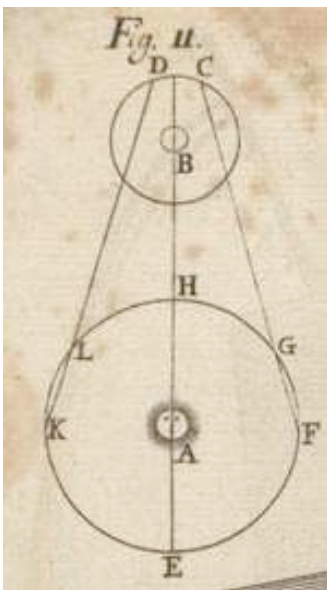
(b) Expliquer précisément comment, selon l'hypothèse de Römer, on peut estimer le temps que met la lumière pour traverser l'orbite terrestre (c'est-à-dire pour parcourir le diamètre du quasi-cercle que fait la trajectoire de la Terre autour du Soleil), en fonction des « retards » et des « avances » mesurés au cours d'une année.

### Correction :

(a) A l'époque, on ne connaît pas précisément les distances qui séparent les planètes du Soleil, ou même les planètes entre elles : donc les éphémérides de Io ne sont pas fondées sur le calcul des distances, mais sur l'hypothèse que la révolution de Io autour de Jupiter est régulière, et s'effectue en près de 42,5 heures. C'est donc une diminution ou une augmentation sensible de ce temps entre deux éclipses que Römer va mesurer. Ou plus exactement, il mesure une durée cumulée : on note le moment de l'immersion dans une période de l'année où la Terre est encore proche de Jupiter, puis deux mois plus tard, quand elle s'en est sensiblement éloignée, et on trouve un retard cumulé qui commence à devenir sensible : (près de 10 minutes). De l'autre côté, le phénomène est le même : quand la Terre se rapproche, le temps entre deux immersions est inférieur à 42,5 heures : quand on considère le temps entre deux émergences, la seconde se produit donc « en avance » par rapport à ce qui est prévu par Cassini, et quand on cumule ces avances on trouve un écart sensible.

Römer va interpréter ces écarts en postulant que la lumière se déplace à une vitesse finie, et que c'est la variation des distances que la lumière doit parcourir entre Io et la Terre qui explique qu'elle

arrive plus ou moins tôt et que l'on « voit » donc l'émergence ou l'immersion plus ou moins tôt. Ainsi, *comme le montre le dessin ci-contre*, quand la Terre se rapproche de Jupiter (B), la lumière parcourt une distance moindre entre une immersion donnée et la suivante (par exemple entre F et G).



(b) Si l'on adopte cette hypothèse, on peut trouver une estimation du temps que met la lumière pour parcourir l'orbite terrestre, en cumulant les avances sur émergences (ou les retards sur immersions) sur une période de 6 mois allant du moment où la Terre est au point le plus éloigné de Jupiter au moment où elle est le plus proche (Jupiter tourne aussi autour du Soleil, mais son cycle de révolution est beaucoup plus long (presque 12 ans), on peut donc considérer qu'en six mois la position Soleil-Jupiter reste globalement vue de la même manière depuis la Terre). Si on trouve une avance cumulée sur émergence sur une demi-année qui correspond à X minutes, on peut en déduire avec une approximation raisonnable pour les données de l'époque que la lumière met X minutes pour traverser l'orbite terrestre.

*Remarque :* Römer obtient une estimation de 22 minutes. Il importe de souligner que cela ne lui permet pas de déterminer précisément la vitesse de la lumière car la distance entre la Terre et le Soleil est à l'époque encore assez mal connue.

# 1) Particules fondamentales

1) Combinaison  $u$  et  $d \Rightarrow$  Baryons de charge  $-e, 0, e$  et  $2e$   
 $\Uparrow$  système de 3 quarks (nbre baryonique  $B=1$ )  
 $(qqq)$

- $-e = 3 \times (-\frac{1}{3}) \Rightarrow (ddd)$  particule  $\Delta^-$
- $0 = 2 \times (-\frac{1}{3}) + (\frac{2}{3}) \Rightarrow (ddu)$  neutron  $n, \Delta^0$  (état excité du neutron)
- $e = -\frac{1}{3} + 2 \times (\frac{2}{3}) \Rightarrow (duu)$  proton  $p, \Delta^+$
- $2e = 3 \times (\frac{2}{3}) \Rightarrow (uuu)$  particule  $\Delta^{++}$  (état métrable  $\rightarrow$  désintégration)

2) Pas de mésons de charge ( $2e$ ) ou de baryons de charge ( $-2e$ )

Méson:  $B=0$  syst de quark - antiquark ( $q\bar{q}$ )

$2 = 3 \times (\frac{2}{3})$  soit 3 quarks et non 2!  $\Rightarrow$  pas un méson

Baryon:  $B=1$  syst de 3 quarks ( $qqq$ )

$-2 = 6 \times (-\frac{1}{3})$  soit 6 quarks et non 3!  $\Rightarrow$  pas un baryon

rem:  $\Delta^{++}$  de charge ( $-2e$ )  $\Rightarrow$  antibaryon

3) Places des quarks  $u, d$  et  $s$  dans les baryons

$\left\{ \begin{array}{l} \text{up } (+\frac{2}{3}) \\ \text{down } (-\frac{1}{3}) \\ \text{strange } (-\frac{1}{3}) \end{array} \right.$

$p = (u, u, d)$

$n = (u, d, d)$

$\Lambda_{\text{baryon}} = (u, d, s)$

en négligeant les énergies de liaisons entre quarks, on obtient: (3 équations, 3 inconnues)

$$\left\{ \begin{array}{l} m_p c^2 = (2m_u + m_d) c^2 \\ m_n c^2 = (2m_d + m_u) c^2 \\ m_\Lambda c^2 = (m_u + m_d + m_s) c^2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} m_d c^2 = \frac{1}{3} (2m_n - m_p) c^2 \\ m_u c^2 = \frac{1}{3} (2m_p - m_n) c^2 \text{ soit } \\ m_s c^2 = (m_\Lambda - m_d - m_u) c^2 \\ = m_\Lambda c^2 - \frac{1}{3} (m_n + m_p) c^2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} m_d c^2 = 313,63 \text{ MeV} \\ m_u c^2 = 312,33 \text{ MeV} \\ m_s c^2 = 490,03 \text{ MeV} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Valeurs} \\ \text{reelles} \\ \text{NIST 2016} \\ 5 \text{ MeV} \\ 1150 \text{ MeV} \end{array}$$

$\rightarrow$  on ne peut pas négliger l'interaction forte!

**CORRIGÉ**

*Première partie*

1<sup>re</sup> question.

L'équation fondamentale de la dynamique relativiste s'écrit :

$$q\vec{E} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (1)$$

Le champ électrique étant uniforme et la vitesse initiale égale à zéro, le mouvement sera rectiligne. En orientant l'axe de référence Ox dans le sens du vecteur  $q\vec{E}$ , c'est-à-dire dans le sens du mouvement, on peut écrire :



Fig. 20.1.

$$qE = \frac{dp}{dt}$$

d'où

$$dp = qE dt$$

et

$$p = qE t \quad (2)$$

puisque  $p = 0$  à  $t = 0$ .

L'énergie cinétique acquise par la particule est égale au travail de la force électrique. Cette force étant constante on a immédiatement :

$$T = q E x \quad (3)$$

$$T = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2} - m_0 c^2 \quad (4)$$

et l'élimination de T et p entre (2), (3) et (4) conduit à l'équation horaire du mouvement :

$$x = \frac{m_0 c^2}{qE} \left[ \left( 1 + \frac{q^2 E^2}{m_0^2 c^2} t^2 \right)^{1/2} - 1 \right] \quad (5)$$

2<sup>e</sup> question. — *Nature du mouvement.*

a)  $p \ll m_0 c$ . — La condition  $p \ll m_0 c$  entraîne, d'après (2) :

$$\frac{t q E}{m_0 c} \ll 1$$

d'où

$$x \approx \frac{m_0 c^2}{qE} \left[ \left( 1 + \frac{q^2 E^2}{2 m_0^2 c^2} t^2 \right) - 1 \right]$$

soit :

$$x \approx \frac{qE}{2 m_0} t^2 \quad (6)$$

Il s'agit du mouvement parabolique classique, la quantité  $qE/m_0$  n'étant rien d'autre que l'accélération classique.

b)  $p \gg m_0 c$ . — La condition  $p \gg m_0 c$  entraîne cette fois

$$\frac{t q E}{m_0 c} \gg 1$$

d'où :

$$x \approx ct \quad (7)$$

Il s'agit alors d'un mouvement quasi-uniforme avec une vitesse très voisine de la vitesse de la lumière.

$$\left( x + \frac{m_0 c^2}{qE} \right)^2 - \frac{t^2}{\left( \frac{m_0 c}{qE} \right)^2} = 1 \quad (8)$$

C'est l'équation d'une hyperbole dont le centre, point de concours des asymptotes, a pour coordonnées

$$t = 0 \quad x = - \frac{m_0 c^2}{qE}$$

La demi-branchette pour laquelle  $x$  et  $t$  sont positifs correspond au mouvement étudié. La figure 20.2 représente l'allure des mouvements  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

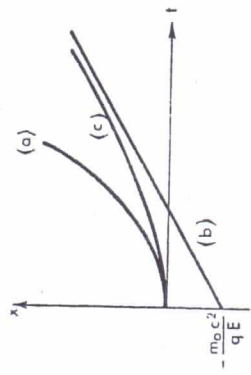


FIG. 20.2.

APPLICATION NUMÉRIQUE. — La condition  $p \gg m_0 c$ , équivalente à  $pc \gg m_0 c^2$ , appliquée dans les relations

$$W^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 = (m_0 c^2 + T)^2$$

entraîne

$$W \simeq pc \simeq T$$

En prenant, pour fixer les idées,  $pc = 10 m_0 c^2$ , on peut dire qu'un électron ayant atteint une énergie cinétique de l'ordre de 5 MeV aura un mouvement sensiblement uniforme avec une vitesse voisine de  $c$  et que ceci ne sera réalisé, avec des protons, que pour des énergies cinétiques supérieures à environ 10 BeV.

1<sup>re</sup> question.

Le champ électrique qui règne au point O de l'axe en fonction du temps a pour expression, compte tenu des conditions initiales à  $t = 0$ , instant d'injection de l'électron :

$$E(x = 0, t) = - E \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Le champ électrique existant à l'instant  $t$  au point d'abscisse  $x$  de l'axe a pour expression :

$$E(x, t) = - E \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) + \varphi_0 \right] \quad (9)$$

L'onde se déplaçant à la vitesse  $c$ , le premier maximum négatif de champ électrique se trouve, à  $t = 0$ , au point d'abscisse  $X_0$  telle que :

$$X_0 = \frac{\varphi_0}{\omega} c$$

et à l'instant  $t$  au point d'abscisse

$$X(t) = X_0 + ct = \frac{\varphi_0}{\omega} c + ct \quad (10)$$

2<sup>e</sup> question.

L'électron étant injecté avec une vitesse initiale portée par l'axe et le champ électrique n'ayant pas de composante radiale pour les points de l'axe, le mouvement de l'électron s'effectuera sur l'axe du tuyau.

L'électron étant au point d'abscisse  $x$  à l'instant  $t$  avec une vitesse  $v$ , l'équation fondamentale de la dynamique relativiste s'écrit, en notant  $-e$  la charge de l'électron :

$$- \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = - e E \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) + \varphi_0 \right] \quad (11)$$

En faisant dans cette expression les mêmes approximations que plus haut

il vient :

$$W \approx \frac{m_0 c^{5/2}}{\sqrt{2 \dot{\epsilon}}} \quad (19)$$

Eliminant alors  $\dot{\epsilon}$  entre (17) et (19) on obtient :

$$\frac{m_0 c^{5/2}}{2} \left[ \frac{1}{W} + \frac{2 c E}{m_0^2 c^3 \omega} \sin \varphi \right] \approx \text{Constante}$$

d'où :

$$\frac{1}{W} + \alpha \sin \varphi \approx \text{Constante} \approx \frac{1}{W_0} + \alpha \sin \varphi \quad (20)$$

et la relation (20) conduit à :

$$y = \frac{W}{W_0} \approx \frac{1}{1 + a (\sin \varphi_0 - \sin \varphi)} \quad (21)$$

avec :

$$a = \frac{2 c E}{m_0^2 c^3 \omega} W_0 \quad (22)$$

APPLICATION NUMÉRIQUE :

- $c = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Cb.}$
- $E = 30 \text{ KV/cm} = 3 \cdot 10^6 \text{ V/m.}$
- $W_0 = 5 \text{ MeV} = 5 \cdot 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ Joule.}$
- $m_0 c^2 = 0,511 \text{ MeV} = 0,511 \cdot 10^{-13} \text{ Joule.}$
- $\omega = 2 \pi \nu = 2 \pi \cdot 3 \cdot 10^9 \text{ radian/seconde.}$
- $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s.}$

d'où :

$$a = 1,83 \quad (23)$$

4<sup>e</sup> question.

Étude de la variation de l'énergie réduite  $y$  en fonction du déphasage  $\varphi$ .

Notons tout d'abord que l'avance  $\epsilon(t)$  est une fonction constamment croissante du temps puisque le maximum négatif de champ électrique qui nous

Effectuons le changement de variable :

$$x(t) = X(t) - \epsilon(t) = \frac{q_0}{\omega} c + ct - \epsilon(t) \quad (12)$$

il vient :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = c E \cos \omega \frac{\epsilon(t)}{c} \quad (13)$$

Dérivant (12) par rapport au temps on obtient

$$v = \dot{x} = c - \dot{\epsilon} \quad (14)$$

et le fait que l'électron soit supposé avoir une vitesse constamment voisine de  $c$  va nous permettre d'écrire :

$$v = \dot{x} \approx c \quad \text{et} \quad \dot{\epsilon} \ll c \quad (15)$$

Effectuant alors ces approximations dans (13) il vient :

$$\frac{d}{dt} \left[ (2 \dot{\epsilon})^{-1/2} \right] \approx \frac{c E}{m_0 c^{3/2}} \cos \omega \frac{\epsilon}{c} \quad (16)$$

d'où l'on tire successivement :

$$\begin{aligned} d \left[ (2 \dot{\epsilon})^{-1/2} \right] \dot{\epsilon} &\approx \frac{c E}{m_0 c^{3/2}} \cos \omega \frac{\epsilon}{c} d\epsilon \\ - d \left[ \left( \frac{\dot{\epsilon}}{2} \right)^{1/2} \right] &\approx \frac{c E}{m_0 c^{1/2}} d \left( \sin \omega \frac{\epsilon}{c} \right) \\ d \left[ \left( \frac{\dot{\epsilon}}{2} \right)^{1/2} \right] + \frac{c E}{m_0 c^{1/2}} \sin \omega \frac{\epsilon}{c} &\approx 0 \end{aligned}$$

soit, en introduisant l'angle  $\varphi$  défini dans le texte :

$$\left( \frac{\dot{\epsilon}}{2} \right)^{1/2} + \frac{c E}{m_0 c^{1/2}} \sin \varphi \approx \text{Constante du mouvement} \quad (17)$$

3<sup>e</sup> question.

L'énergie totale  $W$  de l'électron a pour expression

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (18)$$

La phase  $\varphi(t)$ , proportionnelle à  $\varepsilon(t)$ , est donc elle aussi une fonction constamment croissante du temps et la valeur de  $\varphi(t)$  à  $t = 0$  n'est rien d'autre que  $\varphi_0$ .

Dérivons  $y$  par rapport à  $\sin \varphi$  :

$$\frac{dy}{d(\sin \varphi)} = \frac{a}{[1 + a(\sin \varphi_0 - \sin \varphi)]^2} \text{ toujours positif}$$

et l'on en conclut que  $y$  varie dans le même sens que  $\sin \varphi$ .

Étudions maintenant pour quelles valeurs de  $\varphi_0$ , le dénominateur de (21) peut s'annuler. La condition

$$1 + a(\sin \varphi_0 - \sin \varphi) = 0$$

entraîne

$$\sin \varphi = \sin \varphi_0 + \frac{1}{a}$$

et comme  $\sin \varphi$  est nécessairement compris entre  $-1$  et  $1$ , le dénominateur de (21) ne pourra s'annuler, et, partant, l'énergie de l'électron ne pourra devenir infinie, que si l'on a :

$$-1 \leq \sin \varphi_0 + \frac{1}{a} \leq 1$$

soit :

$$-\left(1 + \frac{1}{a}\right) \leq \sin \varphi_0 \leq 1 - \frac{1}{a} \quad (24)$$

La quantité  $a$  étant positive, l'inégalité de gauche est toujours satisfaite; celle de droite, compte tenu de  $a = 1,83$ , s'écrit :

$$\sin \varphi_0 \leq 0,454$$

L'énergie de l'électron ne pourra donc atteindre des valeurs élevées que si la phase initiale  $\varphi_0$  est choisie sur l'un des deux domaines :

$$\varphi_0 \leq 27^\circ \quad \varphi_0 \geq 153^\circ \quad (25)$$

Compte tenu de ces remarques nous obtenons aisément les différentes courbes de la figure 10.3 indiquant la façon dont varie l'énergie réduite  $y$  en fonction de la phase  $\varphi$  pour différentes valeurs de  $\varphi_0$ .

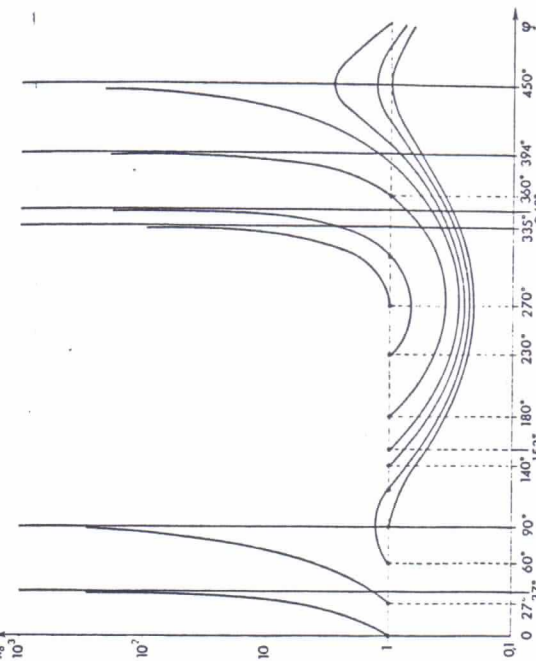


FIG. 20.3.

Le réseau de courbes de la figure 20.3 conduit aux remarques suivantes :

a)  $0^\circ \leq \varphi_0 \leq 27^\circ$ .

L'énergie de l'électron croît sans cesse et la phase  $\varphi$  ne dépasse pas la valeur  $\pi/2$ ; l'électron accompagne l'onde dans sa progression : on dit qu'il « s'accroche » sur l'onde.

b)  $27^\circ < \varphi_0 < 153^\circ$ .

L'énergie de l'électron croît et décroît successivement et la phase  $\varphi$  peut atteindre des valeurs élevées. L'électron « glisse » de plus en plus par rapport à l'onde et ne s'accroche pas.

c)  $153^\circ < \varphi_0 < 3\pi/2$ .

L'électron commence par perdre un peu d'énergie puis, dès que  $\varphi$  atteint la valeur  $3\pi/2$ , il s'accroche et son énergie croît sans cesse. La phase  $\varphi$  ne dépasse pas la valeur  $5\pi/2$ .

d)  $3\pi/2 < \varphi_0 < 2\pi$ .

L'électron s'accroche dès son entrée dans le tube et son énergie croît sans arrêt. La phase  $\varphi$  ne dépasse pas la valeur  $394^\circ$ .

CONCLUSION. — Le but recherché étant évidemment de communiquer à l'électron une énergie cinétique de plus en plus élevée, les valeurs de la phase  $\varphi_0$  qu'il convient de retenir sont donc :

$$\varphi_0 < 27^\circ \quad \varphi_0 \geq 153^\circ$$

REMARQUES. — 1° Un accélérateur linéaire à électrons comprend en réalité deux parties :

- dans une première partie du tube de glissement, l'onde électromagnétique a une vitesse croissante de façon que des électrons injectés avec une énergie cinétique très faible puissent s'y accrocher et atteindre ainsi une énergie cinétique de l'ordre de 5 MeV correspondant à une vitesse de propagation suffisamment voisine de  $c$ .
- dans une seconde partie du tube, celle que nous avons envisagée dans le problème, l'onde se déplace avec une vitesse constante égale à  $c$  et l'électron s'y accroche à condition que la phase  $\varphi_0$  correspondant à l'arrivée de l'électron soit correcte.

Notons que la première partie du tube peut être remplacée par un accélérateur auxiliaire.

2° Pour une phase initiale  $\varphi_0$ , supposée correctement choisie, la longueur du tube de glissement est d'autant plus grande que l'on désire obtenir une énergie plus élevée. Dans l'accélérateur linéaire de Stanford (U.S.A.) les électrons ont une énergie de l'ordre de 20 GeV. après un parcours de 3 km dans un tube de 10 cm de diamètre.

3° Il convient enfin de remarquer que nous nous sommes placés dans les conditions idéales de l'électron se déplaçant sur l'axe du tube de glissement. L'électron qui est injecté au voisinage de l'axe a un mouvement plus complexe car il faut tenir compte de la composante radiale du champ électrique et de l'induction magnétique.